

对于“儿童数学”在教学中作用之反思 ——从一位数加减法运算的三种教学思路说起（草稿）

马立平

- a. 这篇文章的写作动机，来自我对美国小学数学教学现状的两个忧虑。忧虑之一，是看到许多高年级小学生，甚至中学生、大学生，仍然需要依靠数手指或使用计数器(counters)来进行简单的加减运算。虽然目前没有统计资料能告诉我们这样的学生究竟占多大的比例，也没有研究探讨过常年需要借助工具进行简单加减运算，究竟会对学生的数学学习产生怎样不良的影响，然而如果你是一个中小学的教师，或者如果你经常去美国普通中小学听课，我相信你会理解我的忧虑。(However, as a former elementary teacher and a current scholar in math education, it does bother me.)
- b. 忧虑之二，是感觉到美国小学数学界在解决这个问题时对所谓“儿童数学”的过度依赖。根据当下流行的教学理念，依靠数计数器来求得运算得数，是小学生初入学时带到学校来的、自发的“儿童数学”，教学应当鼓励并且依靠这样的“儿童数学”。在美国一、二年级甚至三年级小学生学习整数加减运算的数学课上，五花八门的计数器是最常见的学具。然而事实是，通过四、五年乃至更长久这样无数遍的数数，相当数量的学生仍然没有自动发展起作为整数和分数四则运算基础的一位数加减心算的能力。可是，在不鼓励数计数器的中国和其他一些国家，这种心算能力是一年级小学生就掌握了。按理说，“教学和学生原有知识相联系”是各国数学教育界的共识。那么，当下美国数学教育界对“儿童数学”的认识是不是有值得反思和检讨的地方？这篇文章将比较我所了解的三种一位数加减法教学的思路，最终提出我对“儿童数学”的质疑。
- c. 文章的篇幅稍长了些。原因是我不仅希望它提出的理论问题有说服力，也希望它对实践——对改进美国一位数加减运算的教学有所帮助。文章对美国读者所不熟悉的“推算法”作了系统的介绍，对它的原理、在各个教学阶段所引进的思维工具，以及如何在教学中兼顾“对学科知识的诚实”和“对学生认知的体贴”，都作了细致的讨论。除了教学思路以外，我更希望提请读者考虑它们背后的理念。从某种意义上讲，这其实交织在一起的两篇文章：对于美国读者所不熟悉的“推算法”的介绍，以及对“儿童数学”的反思。

一位数加减法运算的三种教学思路之比较

1. 在当今世界不少国家，“20 以内数字的认识和加减运算”是小学数学第一块实质性的内容，它包括四个互相关联的部分：数字 1-20 的认识；一位数加法和相关的减法运算；20 以内含两位数的加法和减法运算；整数加法和减法概念初步的介绍。本文将着重讨论其第二部分，即“一位数加法和相关的减法”（以下称“一位数加减法”）。

2. 一位数加减运算技能（尤其是心算技能）的重要性，在于它是小学数学涉及的所有整数、小数和分数四则运算的重要基石。它不仅是多位数加减法运算得以进行的基础，也是多位数乘法运算中不可缺少的组成部分。一位数加减运算技能的熟练与否，直接关系到之后所有运算技能发展的顺利与否。
3. “一位加减法”内容的定义，是“和与被减数是 2-18 的一位数加法和减法”，这一点各国小学数学界并没有歧义。但是，在教学途径方面，或者说怎样让小学生学习一位数加减运算方面，却有不同。根据我的观察，美国小学一位数加减法的教学途径主要有两种：“数数法”和“记背事实法”，前者诉诸于计数器（常常是手指），后者诉诸于“数字事实”。这两种教学途径背后的理念不同，然而并存于学校教学实践中。通过本文，我想向美国同行介绍一位数加减法教学的另一种诉诸于数学思维工具的途径，这种教学途径应用于中国等一些国家的小学数学教学中，我称之为“推算法”。
4. “推算法”以入学前儿童已有的数学能力为出发点，用一年级小学生可以接受的方式，逐步地、有计划地向他们介绍一些数学思维工具，引领他们“动脑筋”，从已知推算未知、从容易的运算推算困难的运算。在这些思维工具的帮助下，一年级学生发展起一位数加减的心算能力，成为日后进一步学习小学数学的坚实基础。
5. 下面，我们先一起简略地回顾一下读者熟悉的“数数法”和“记背事实法”。然后再比较详细地介绍“推算法”——帮助小学生实施一位数加减法“推算”的数学思维工具究竟有哪些？具体的“推算”过程是怎样的？使用思维工具进行推算，究竟是如何帮助学生一步一步地发展起一位数加减的心算能力的？这些思维工具又是怎样介绍给入学不久的一年级小学生的？推算法和数数法相比，有哪些共同点、哪些不同点？推算法和记背事实法相比，又有哪些共同点、哪些不同点？这些共同点和不同点意味着什么？最后，文章将提出三个问题以期引起进一步的讨论。

“数数”和“记背事实”：美国两种常见的教学途径

数数法

6. 数数法，就是借助计数器(counters)，通过数数得到加、减运算的答案。美国小学生常用的计数器有手指和各种小物件（如塑料片、塑料块、豆子等），教室墙上贴的数轴，也常常被用作通过数数求加减答数的“计数器”。
7. 数数法的教学，主要是帮助学生从“低级的”数数策略过渡到“高级的”数数策略。我们知道，数数法其实是多数小学生在入学之前就已经使用的、儿童“自己”的运算方法，最常用的 counters 是学生自己的手指。有关研究指出，随着运算经验的增多，儿童通过数数进行运算的策略会一步一步地“优化”。Chapin 和 Johnson 在他们合著的 *Math matters* (Chapin & Johnson, 2006, pp.63-64) 一书里对 CGI 研究的儿童数数策略有简明的归纳。加法策略的“优化”过程是，从“全数(counting all)”、到“从第一个数开始数(counting on from first)”，到“从大数开始数(counting on from larger)”。举

$2+5=?$ 为例，“全数”，是先出 2 个手指，再出 5 个手指，然后从 1 开始把所有的手指从头数一遍。稍高级的是“从第一个数开始数”，仍然是“ $2+5$ ”，儿童不再从 1 开始数，而是从第一个加数 2 开始数，数 5 个数，这样就节约了数第一个加数的时间。更高级的策略是“从大数开始数”，即从两个加数里一个比较大的开始数。“ $2+5$ ”不是从 2 开始数，而是从 5 开始数，数 2 个数，这样就更加节约时间了。由于我们只有 10 个手指，“全数”只能解决和在 10 以内的加法，而其他两种策略这可以解决所有加一位数的加法的运算。减法也可以用数数完成，也有不同的策略，比如“往下数 (counting down from)”，“往下数到(counting down to)”，和“从已知数往上数 (counting up from given)”等（见 Chapin, S. & Johnson (2006), p.64）。

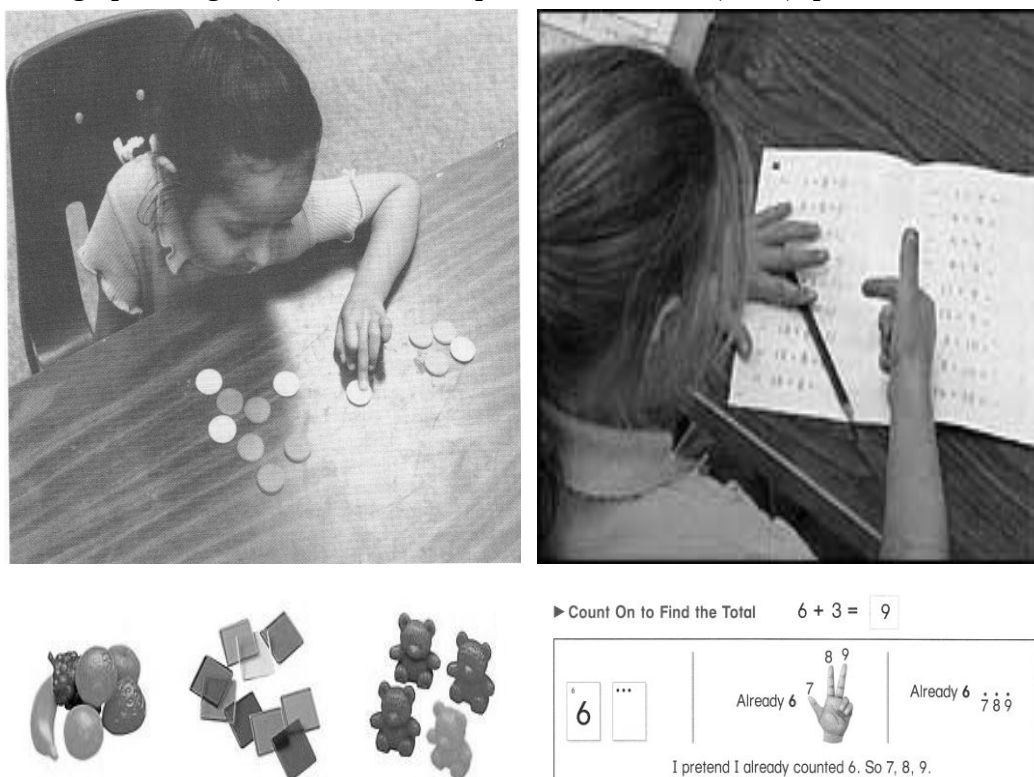


图 1. 数数法、计数器和课本截图（课本材料取自二年级教材）

8. 无论怎样的一位数加法和相应的减法，用数数法都能解决。然而，“数数法”的问题，在于不能确保发展起学生一位数加减的心算能力；相反，熟练了数数法的学生很可能会养成依靠数数进行运算的习惯，并长期延续下去（如用数手指、数其他计数器或画点点数等），因而在某种程度上妨碍了心算能力的发展。而除非小学数学放弃学生学习四则运算法则的内容，一位数加减的心算能力是学习必须的。试想，在进行多位数加减法竖式运算或乘法竖式运算时，还需要依靠数手指完成其中的每一步加、减运算，整个运算过程就会变得零碎、拖沓，而失去其完整性。

记背事实法

9. “记背事实法”的目的，正在于发展学生 20 以内加减法的心算能力。它所教给学生的，是 200 条“数目事实(number facts)”。我们知道，阿拉伯数字从 0 到 9 的十个一位数，可以组成 100 个二元组合。“记背事实法”把这些组合与它们的和称为 100 个“加法事实($0+0=0, 0+1=1, \dots, 9+9=18$)”。与这 100 个“加法事实(addition facts)”相对应的，是 100 个“减法事实(subtraction facts)”($0-0=0, 1-0=1, \dots, 18-9=9$)。这 200 条事实，包括了一位数加减法中所有可能出现的情况，统称为“数目事实”。因此，如果一个人记住了这 200 条“事实”，就具备了 20 以内加减法的心算能力。“记背事实法”，就是要让学生记住这 200 条事实。
10. “记背事实法”教学，常常是先通过数数或实物，向学生揭示一条条“加法事实和减法事实”，然后通过反复操练，帮助学生记住它们。Mad minute 是美国教师比较常用的一种帮助学生练习记背事实的方法。在一页纸上列出几十个“事实”题目，要求学生在一分钟里写出来得数。Mad minute 用竖式表现“数字事实”，这样的安排，很可能是由于其和多位数加减法竖式运算的形式比较接近。操练可以有加法、减法和加减混合，也可以根据需要选取数字的大小。比如图 3 左部就是 10 以下加减混合运算的练习纸样张。也有用比较“有趣”的形式让学生操练记背事实的练习（见图 3 右上）。还有一种比较“先进”的记背事实法，是把一组相关的事实联系起来，比如把和“7”有关的“事实”组成一列“事实”火车，帮助学生记背（见图 3 右下）。

Mad Minute / 30

5 <u>-1</u>	3 <u>+2</u>	3 <u>-2</u>	6 <u>+0</u>	10 <u>-4</u>
10 <u>-6</u>	5 <u>+1</u>	8 <u>-6</u>	0 <u>+0</u>	0 <u>-0</u>
3 <u>-1</u>	2 <u>+0</u>	4 <u>-2</u>	5 <u>+3</u>	10 <u>-0</u>
8 <u>-3</u>	1 <u>+2</u>	10 <u>-9</u>	5 <u>+1</u>	8 <u>-6</u>
6 <u>-3</u>	2 <u>+4</u>	6 <u>-3</u>	2 <u>+1</u>	6 <u>-6</u>
2 <u>-1</u>	3 <u>+2</u>	2 <u>-2</u>	7 <u>+1</u>	1 <u>-0</u>

图 2：各种帮助学生记住“数目事实 (number facts)”的练习

11. 作为培养学生一位数加减法心算能力的教学法，“记背事实法”从逻辑上讲是严密的。但是，它本身的两个要素——“记背”和把一位数加减运算视作 200 条“事实”，在调动学生学习主动性和潜力方面都有欠缺之处。
12. 首先，记背虽然是我们重要的智力功能，也是儿童智力活动的“长项”。但是，如果仅仅诉诸于记背，则忽略了学生其他方面智力活动在学习中的参与。而且，类似“数目事实”形式的材料的大量记背其实比看上去或想象中的要困难得多。ⁱ
13. 另外，当我们把一位数加减法视作 200 条相互独立的事实的时候，这 200 条“事实”之间内在的联系被忽略了，它们在难度和重要性方面实际存在的差别也被忽略了。这 200 个学习任务之间失去了互相支持。比如说，如果把 $4+3=7$ 和 $3+4=7$ 当作两个独立的事实分别记忆，这两个学习任务之间就是没有相互支持的。
14. 近来，有些美国教材上出现了把一些事实组织成“事实家庭(facts family)”的做法，比如，把 $3+4=7$ 、 $4+3=7$ 、 $7-3=4$ 、 $7-4=3$ 组合成一个“事实家庭”，希望通过这些事实之间的联系提高记背的有效性，这是一种进步。但是，这样的联系还是十分有限的。比如说，在上图“7-train”里我们看到，当 $1+6$ 作为 $6+1$ 同一节车厢的上、下两层时，对学生来说比较容易的 $6+1$ ，在这里可以作为对难度较高的 $1+6$ 的支持。但是 $6+1$ 的学习能不能支持 $7-6$ 或 $7-1$ 呢？能不能支持 $2+5$ 、 $3+4$ 、 $9+7$ 、 $16-7$ ……呢？事实上，如果仅仅以学生能够“记背事实”为教学目标，那么，我们还是不会去引导他们认识这些“事实”下面更深层的联系，也不会努力去调动他们“记忆”之外的智力活动的。

推算： 利用思维工具从已知求未知

15. “数数法”的重点在于让学生“动手”——具体地说是用手指作为计数器通过数数算出一位数加减的结果。“记背事实法”诉诸学生的记忆力——通过练习记住 200 条“数字事实”。但是，还存在着另一种一位数加减的教学途径——通过让学生动脑筋发展他们的心算能力，我把这种方法叫做“推算法”ⁱⁱ。在中国和世界上其他一些国家，可以看到这种教学法。
16. 中国小学数学教师常常对学生们说的一句话是“动动你们的小脑筋”。在一位数加减法阶段，“动脑筋”就是要求学生根据一些“思维工具”，通过“推算”，求出他们原来不知道的，或者对他们来说比较困难的运算答案。换一句话说，学生既不是靠数手指或其他计数器，也不靠“看”教材上的图示得到运算的答案，而是自己“动脑筋”想出答案。
17. 帮助一年级小学生学习推算的“思维工具”主要是小学数学中的一些“理论知识”，包括：关于数量的基本认识（比如 2-9 的数的组成）、关于数量关系性质的认识（比如减法是加法的逆运算）、关于运算规律的认识（比如加法交换律、互补律、结合律）、和记数法基本知识（比如 10 进制和 10 的组成）等。运用这些思维工具，一年级小学生可以一步一步地提升运算能力，最终达到掌握一位数加减法心算的目的。

“思维工具”帮助学生学习推算：三项技能和四个学习阶段

18. 与数数法和记背事实法相比，推算法显得更加复杂、精细得多。这是它本身所含的学习任务所决定的。如果说“数数法”和“记背事实法”的学习任务是单一的运算的话，“推算法”的学习任务是双重的：既要掌握思维工具，又要学习运算技能。下面我们先介绍思维工具如何可以帮助学生进行推算，然后再讨论这些思维工具将如何介绍给一年级小学生。
19. 一位数加减法包括三项运算技能，它们是：
 - A) 和或被减数是 2-9 的加、减法；
 - B) 和或被减数是 10 的加、减法；
 - C) 和或被减数是 11-18 的一位数加、减法。
20. 在推算法的教学途径中，这三项技能是通过四个教学阶段完成的。四个阶段的前两个和技能 A 相对应，第三阶段与技能 B 相对应，第四阶段与技能 C 相对应。也就是说，技能 A “和或被减数是 2-9 的加、减法”是分在两个阶段完成的：
 - 第一阶段：数字在 1-5 范围内的运算；
 - 第二阶段：和与被减数是 6-9 的运算；
 - 第三阶段：和与被减数是 10 的运算；
 - 第四阶段：和与被减数是 11-18 的运算。
21. 在运算技能方面，以上四个阶段步步递进，后面阶段不重复前面阶段。但是从运算的数段方面，则后面阶段包含前一阶段，如滚雪球一般。比如说，第二阶段处理的运算技能是“和与被减数是 6-9 的运算”，但是所包含的数段不只是 6-9，而是 1-9。请看下表：

三项运算技能	四个教学阶段	
	教学内容	运算数段
A) 和或被减数是 2-9 的加、减法	1) 数字在 1-5 范围内的加、减法	1-5
	2) 和与被减数是 6-9 的加、减法	1-9
B) 和或被减数是 10 的加、减法	3) 和或被减数是 10 的加、减法	1-10
C) 和或被减数是 11-18 的一位数加、减法	4) 和或被减数是 11-18 的一位数加、减法	1-20

表 1：一位数加减法推算法的三项运算技能和四个教学阶段

22. 四个阶段的学习，第一阶段以学生入学前的运算能力为基础。之后的每一个阶段，都以之前学习的累积为基础。接下来讨论“推算法”的原理，这是我根据自己对中国小学数学教育的了解，以及对 1988 年到 2008 年之间出版的七套不同的中国小学数学教材ⁱⁱⁱ的分析归纳出来的。后面体现这些原理的例子，为方便起见，取自已经翻译成了英文的前苏联一年级小学数学课本。

第一教学阶段：依托学生原有运算能力引进最初的思维工具

23. 第一阶段是“数字在 1-5 范围内的运算”。近些年来，儿童在入学之前已经会用“数数”进行简单运算的现象，受到人们的注意并且得到了系统的研究。这些研究的结果，成为“数数法”的依据。但是，儿童另一种重要的运算能力——他们对于小数量的心算能力——却似乎还没有得到研究界的重视。而**推算法的教学正是以儿童这种对小数量的心算能力为出发点的。**
24. 创设一个让一年级学生感到轻松愉快、而且愿意积极地和你交流的对话环境，用他们熟悉的语言，以他们日常生活里的内容为主题，把 3 以内数量的运算编成应用题问他们，比如：
- 爸爸给了你 2 颗糖，妈妈给了你 1 颗糖，你一共得到了几颗糖？
 - 你有 3 颗糖，我有 1 颗糖，谁的糖多？多几颗？
 - 你有 3 颗糖，吃了 2 颗，还剩几颗？
25. 你会发现孩子们会告诉你正确的答案，根本不需要借助手指数运算。
26. 孩子们能顺利回答这样的问题，说明他们对数量 1、2、3 掌握得很好，并且已经：1) 有了加法和减法的初步概念——能够正确地判断在怎样的情况下采用什么运算；2) 有了进行 3 以内心算的技能；3) 有了“群数量(quantity set)”的概念——能够把一个以上的单位（2 或 3）视作作一个数量；4) 有了数的组合的概念——懂得了 3 是 2 和 1 组成的。这些认识和能力，正是他们日后数学思维的“种子”，也是“推算法”所需要的“思维工具”的落脚点。
27. 儿童在入学前已经具备的、对 3 以内数量的认识和心算能力，应该是来自我们人类对一、二、三这三个数量天生的直接辨别能力。一、二、三这三个数量，一般称之为“**直观数量 (perceivable quantities)**”，是几乎所有的人都不需要数就能一眼辨别出来的数量^{iv}。而幼儿园学生的身上已经可以测到这种能力^v。
28. 其实，一年级教师甚至會注意到，数字 4 和 5 的认识和它们以内的加、减运算对于刚入学的学生也大多都比较容易。在 *Children's Counting and Concepts of Number* 一书里，就有两岁十个月的孩子在生活里主动说出“二和二合起来是四(Two and two make four)”的例子(Fuson, p. 19)。这或许是因为在生活里孩子们有较多的机会熟悉这些数量——每次运用自己的双手，就看到一个手上的 5 个手指，4 个在一边，1 个在另一边。而除了他们经常观察到的这 4 和 1 组成的 5 以外，4 和 5 的其他组合（如 2 和 2、3 和 1、3 和 2 等），都是直观数字的组合，其实，对于相当一部分人来说，4 甚至仍然是可以一眼辨认出来的直观数量。
29. 总之，1-5 这个数段里的运算技能，似乎是大多数学生在进入一年级之前就已经掌握了。从这个意义上看，一年级“数字在 1-5 范围内的运算”其实是一次“复习”。
30. 然而，这次“复习”在提升学生智力方面仍然担当着实质性的任务。这些任务是：
31. 首先，帮助学生以原来的“具体数”概念为基础，初步建立起“抽象数”的概念。
“数”，在多数入学之前的小学生脑海里，还都是“具体数”：一个人、两辆车、三

颗糖…… 他们所进行运算的，也都是这些具体数。而数学进行运算的都是抽象数，所以，需要让学生从他们熟悉的三个人、三辆车、三颗糖这样的具体数过渡到“三”这个抽象数^{vi}。

32. 第二，帮助学生学习用符号表达已知的数量。不仅要从小数、三辆车、三颗糖过渡到“三”这个抽象数，还要学习用“3”这个符号来表达它，这也是一个智力上的任务。
33. 第三，以学生已知的“3是2和1组成的”为基础，通过进一步揭示“4是2和2组成的”、“4是3和1组成的”、“5是3和2组成的”、“5是4和1组成的”等等，帮助学生建立起“一个大数是可以由两个小数组成的”概念，并且进一步认识大数和小数的联系：因为“3是2和1组成的”，所以 $2+1=3$ ；因为“5是3和2组成的”，所以 $3+2=5$ 。由于学生对1-5数段的熟悉，这样的认识很容易建立起来，而这些认识正是为下一阶段学习准备的思维工具。
34. 第四，帮助学生学习用算式表达已知的“运算”。利用学生已经知道的“爸爸给我2颗糖，妈妈给我1颗糖，那我就有了3颗糖，”让他们学会用“ $2+1=3$ ”这个正式的数学方式来表示运算的过程。
35. 第五，帮助一小部分对于和或被减数是4或5的运算尚未熟练的学生，掌握相关的运算。由于家庭教育或生活环境的不同，有些孩子在入学时对和或被减数是4或5的运算还不够熟练，要帮助他们从原有的基础上更进一步，掌握4和5的运算技能。
36. 事实上，“数字1-5的加、减运算”这一阶段的教学任务，很像是学生原有数量知识的“盘点”，通过“盘点”，学生对自己已有的一部分数学知识有了明确的了解和感受，同时建立起成为今后数学学习的最初的概念基础。在这个阶段里没有“推算”，但是却利用学生原有的知识，开始为今后进行“推算”建立基础。

第二教学阶段：学习运用思维工具进行推算

37. 第二阶段是“和与被减数是6-9的运算”。相对数字1-5，6、7、8、9这四个数字对学生来讲要陌生得多。因此，他们对这一阶段的心算，在不同程度上开始感到困难、感到有障碍了。面对这一段的运算，不少学生很“自然”地要借助他们的手指来“帮忙”了。事实上，这时数学教学正面临着一个岔路口：是听凭学生采用他们习惯的、数手指（或其他计数器）的方法，还是引领他们用一种“新”的、借助数学思维工具从已知推算未知的方法？换句话说，让什么来帮忙？是手指或计数器，还是数学的思维方法？“推算法”选择的是后者，而在前一段通过复习完成的五个教学任务，正是为在这一阶段引领学生学习“推算”作准备的。
38. 这一阶段的难度，首先在于学生对6、7、8、9这四个数字的不熟悉。为化解这个难度第一阶段学习从两个方面作了准备：第一，在学生原有的“2是1和1合成的”、“3是1和2合成的”认识基础上，通过“4是3和1合成的”、“4是2和2合成的”、“5是3和2合成的”等延伸，建立起了“大数是小数合成的”概念。第二，通过复习，提高了学生对数字1-5的熟悉程度。所以，虽然学生对于6、7、8、9不熟

悉，但是，一则有了“大数是小数合成的”这个概念，二则熟悉了合成这些“大数”的“小数”，对于大数的认识就有了基础，难度就减低了。比如说，一个学生可能会觉得“6”是一个陌生的、难以掌握的数字，但是，当他看到“6”是5和1的组合、是4和2的组合，是3和3的组合，而1、2、3、4、5这些数字是他很熟悉的，6也就变得不那么陌生了。他离对数字6的掌握就接近了一步。

39. 由于学生已经了解了“因为3是2和1组成的，所以 $2+1=3$ ”这样的推理，所以，当他们看到“6是5和1组成的”、“6是4和2组成的”、“6是3和3组成的”时候，就可以不依靠数数，而推算出 $6+1=?$ ， $4+2=?$ ， $3+3=?$ 了。由于根据数的组合进行推算的要求是前面的数字要掌握得好，所以这个阶段里和与被减数是6、是7、是8、是9的运算又被作为四小段依次完成。
40. 加法的交换律也是进行推算的有用的思维工具。一般说来，大数加小数比较容易，而小数加大数比较困难。比如，运算 $5+2=7$ 不觉得困难的学生，碰到 $2+5=$ 可能就会有困难。然而，如果他了解了加法交换律，他就能根据自己已经知道的 $5+2=7$ ，推算出 $2+5=$ 也等于7了。再比如，“+1”是没有难度的，所以， $5+1$ 、 $6+1$ 、 $7+1$ 、 $9+1$ 学生都会觉得“很容易”。但是， $1+5$ 、 $1+6$ 、 $1+7$ 、 $1+8$ 就不那么容易了，了解了加法交换律，就可以帮助学生借助“很容易”的运算来进行“不那么容易”的运算了。
41. 另外，我们知道减法比加法困难。比如 $9-2$ 比 $7+2$ 难。但是，如果学生了解了减法是加法的逆运算，减法是求一个未知的加数，就可以根据加法运算推算出减法的答案了：比如根据 $7+2=9$ 推算出 $9-2=7$ 。在中国和一些其他的国家，加法和减法是合在一起进行教学的，中国教师会常常提醒学生们“做减法、想加法”，就是要依靠学生已经掌握的、对他们来说比较容易的加法运算的技能，支持他们减法运算的学习。
42. 引导学生观察“加法互补律”以及它的减法表述也可以提高学生的推算能力^{vii}。比如， $6+1=7$ 很容易。根据加法互补律，学生可以从“ $6+1=7$ ”自行推算出 $5+2=?$ $4+3=?$ 还可以推算出 $6+2=?$ $6+3=?$ ……根据加法互补律的减法表述，学生还可以由 $8-1=7$ 自行推算出 $8-2=?$ ， $8-3=?$ ， $8-4=?$ ， $8-5=?$ ……
43. 总之，“数的组合”、“交换律”、“逆运算”和“互补律”等知识，都是学生在“和与被减数是6-9的运算”阶段遇到障碍时“动脑筋”的方向和解决问题的工具。这些思维工具可以协同作用，让学生认识用不同的方法解决同一个问题，也可以让学生挑选自己最“喜欢”的方法来解决问题。总而言之，有了思维工具的帮助，放弃数手指或数计数器，由学生尝试自行完成这一阶段运算，最终发展起心算能力是完全可以做到的。
44. 同样是靠学生自己求得加减运算的答案，和“数数法”相比，“推算法”教学的“短处”，在于需要花更多的时间和努力——“数数法”是学生原来就会的方法，所需要的教学时间很有限（主要是帮助一些学生用“高级的策略”替换“低级的策略”，如从“全数”到“从大数开始数”）；而推算法则不仅需要从前阶段（比如1-5数段

的加减教学)就开始准备,而且还需要在本阶段的教学增加介绍思维工具的时间和相应的练习任务。如此,既需要更多的学习时间,还需要在心智上付出的更多努力。

45. 但是,“推算法”也有“数数法”所没有的长处:

- 学得扎实。无论是对 6、7、8、9 各数的认识,还是以其中某数为和或被减数的加减法,学生经过了自已积极参与的、从不同角度、用不同方法的思考和运算,便印象深刻、容易掌握、容易记住。
- 学生一旦完成了这一阶段的心算学习,就等于“戒”掉了数手指的习惯,迈出了摆脱计数器进行运算的关键一步。他们学会的不仅仅是具体几个数有关的运算,更重要的是学会了心算的方法,开始培养起了心算的习惯和信心。
- 学生在学习小学数学的一开始,就接触并练习通过“思维工具”从已知求未知的数学思维方法,为整个小学阶段的数学学习确立了正确的态度和方法。

46. 以上三点,都使得这一阶段的学习真正成为今后学习的基础——既是直接的后续阶段的基础,也是整个小学数学学习的基础。

第三教学阶段: 记数法与 10 的组合

47. 由于“10”在我们使用的十进制位值制计数法里特殊的地位,它在概念上和技术上的重要性,足以使这一个数的认识能独立出来作为一个学习阶段处理。

48. 从概念上看,10 是学生学习的第一个两位数,也是他们和“位值概念”的第一次接触。

49. 从运算技能上看,10 的二元组合对于学生掌握进、退位的加、减法运算有突出的重要性。

50. 10 的五个二元组合(9 和 1、8 和 2、7 和 3、6 和 4、5 和 5)仅仅靠“死记硬背”是不容易直接灌输到学生脑子里去的,但是,如果学生通过前两个阶段扎实的学习,对 1-9 这些数字都相当熟悉,再加上已经学会使用的“思维工具”,在这一阶段都可以用来支持“推算”。事实上,十的二元组合本身将成为下一阶段学习中进行推算的“思维工具”。

第四教学阶段: 记数法的深化与加法结合律的引进

51. “和与被减数是 11-18 的加法和减法”,也有人称之为“20 以内进位加法和退位减法”,是整数和小数进、退位的加减运算不可或缺的基础。如果这个阶段的学习任务不能完成,学生终究还是不能全面掌握加、减、乘、除运算法则。但是,对一年级小学生来说,这一阶段又是最困难的。一方面,数字大,远远超出了他们可以直接掌握的范围。另一方面,涉及记数法,有“位值”这一抽象概念参与其中。可以说,这个阶段学习的难度,是绝大多数一年级小学生无法一步跨越的。但是,“推算法”通过前面三个阶段,引领学生走上了一个又一个的台阶,使得这一阶段的学习难度减低到了多数学生能够承受的范围。

52. 事实上，要学生自己尝试“和与被减数是 11-18 的加法和减法”的推算，在之前三个阶段累积起来的思维和技能高度之上，还需要两种“思维工具”——认识根据位值记数法书写的数字 11-20 的意义，和加法结合律。
53. 有了这两个新的思维工具，学生就可以不依靠数手指或画点点，而是通过“动脑筋”“想”出这一阶段运算的得数了。比如 $9+2=?$ 根据之前学生已经掌握的运算知识，可判断出得数大于 10。但是究竟是多少呢？了解了结合律以及 9 和 2 的二元组合，就能把可以和 9 组成 10 的 1 从 2 里“拆”出来，与 9 组成一个十，还剩下一个 1。根据记数法，一个十和一个一写作 11，所以 $9+2=11$ 。而根据交换律和逆运算，可以由 $9+2=11$ 推算出 $2+9=11$ 、 $11-2=9$ 、 $11-9=2$ 。同理，可以推算出其他这一学习阶段的任何题目。
54. 另外，一旦由结合律推算出一个运算的得数，还可以根据互补律推出其他运算的得数。比如，可以由 $9+2=11$ 推算出 $9+3=12$ 、 $9+4=13$ 、 $9+5=14$ 、 $9+6=15$ ……而进一步由它们推算出其他一组一组的运算得数。前面学习的数学思维的工具以及习得的运算技能，为学生准备好了通过推算达到运算结果的不同途径。到这种时候，学生不是被动地等题目来，而是甚至可以主动拟写和或被减数是 11-18 的加法运算和减法的“运算表”了。在拟写“运算表”的过程中，学生很容易发现有趣又有用的规律。比如，9 加一个数，得数总是等于十加那个数减 1（如 $9+2=11$ ， $9+3=12$ ， $9+4=13$ ……），8 加一个数，得数总是等于十加那个数减 2（如 $9+2=11$ ， $9+3=12$ ， $9+4=13$ ……）。这些规律一旦由学生自己“发现”，将大大提高学生的学习兴趣和学习效率，也使得记忆的负担大大减轻。
55. 到这一阶段的学习完成了的时候，一年级小学生一位数加减法的心算能力的发展基本完成了。这种能力，将成为之后“100 以内加减法”心算能力的基础，成为将来要掌握的多位数加、减、乘、除运算法则的技能构成。当然，在今后各种运算过程中，学生在一年级建立起来的一位数加减法的心算能力也将无数次地得到强化和巩固。

“思维工具”一览

56. 综上所述，我们看到了一种让一年级小学生摆脱数手指或计数器，发展起一位数加减法的心算能力的途径。事实上，这也是中国等一些国家的做法。但是，这不是一日之功，而是通过师生二十来个星期的不断努力才实现的^{viii}。
57. 在图 4 中，我们可以看到在四个学习阶段引进各种“思维工具”的情况。用虚线分割的区域，表示各思维工具引进的阶段。

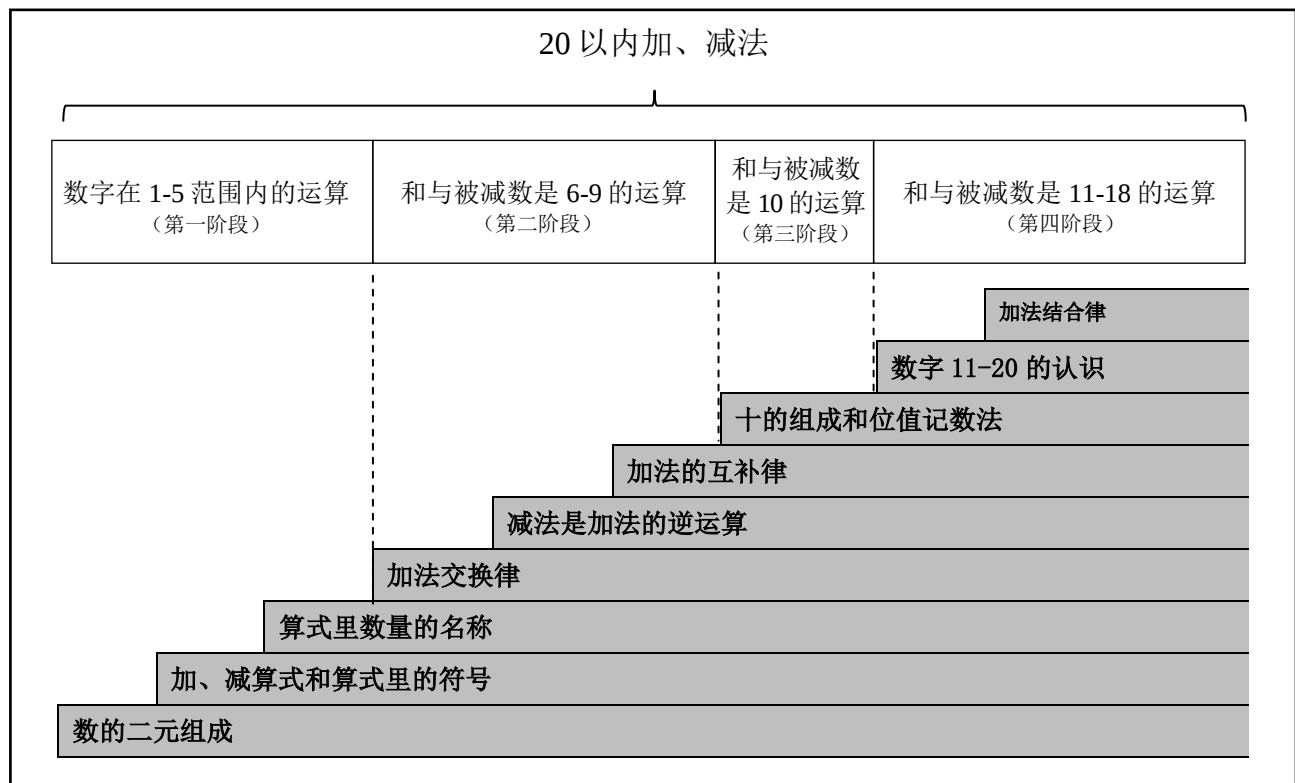


图 3：20 以内加减运算各阶段“思维工具”的引进

58. 以上我们看到，在学习一位数加减法的过程里，“推算法”引领学生一步一步地迈上了九个“台阶”，这些“台阶”的教学内容，多数是从已知求未知需要的“思维工具”，也有一些是为了之后引进思维工具所做的铺垫（比如算式里数量的名称）。除了第一阶段“数字在 1-5 范围内的运算”以外，各阶段所引进的“思维工具”都是该阶段所需要的，可以直接应用、为该阶段学习服务的，同时，也都是其之后教学阶段所需要的。并且，这些“思维工具”不仅仅在一位数加减运算中需要，也将是整个小学数学学习中所需要的。

把“思维工具”介绍给一年级小学生：
如何做到“对学科知识的诚实”和“对学生认知的体贴”二者兼顾

59. 接下来的问题是，究竟怎样把“交换律”、“逆运算”、“互补律”、“结合律”这样的思维工具介绍给才上了几周数学课的一年级学生呢？下面我们从已经由芝加哥大学 UCSMP 翻译成了英文的前苏联一年级教材 (Moro etc., 1980/1992) 引用一些例子来做出说明。这本前苏联一年级教材在“思维工具”引进的阶段以及教学手段和中国略有不同，但是“推算”的基本思路是一致的。
60. 教材中的课文，可分成“引进新概念”和“巩固性练习”两大类。以下引用的介绍推算思维工具课文，都属于“引进新概念”一类。这类课文一般包括三个部分：1) 标题；2) 介绍新概念的图题；3) 相关的练习题。如果需要，还会在“引进新概念”的课文之后安排“巩固性练习”的课文。
61. “引进新概念”课文的标题，一般不是概念或思维工具的名称，而是该课学习任务的关键词。比如，介绍加法交换律的课文标题是“加数位置的互换(Interchanging Addends)”，介绍减法是加法逆运算的课文标题是“怎样求一个未知的加数(How to find an unknown addend)”等等。
62. 课文的“概念介绍”部分，主要采取“图画和算式相结合”的形式：用和学生生活相关内容为主题的图画，配以适当的算式。图画和算式中所用的数字，都是学生业已掌握了低数段的数字。
63. “概念介绍”后面的“练习”部分，通常由几组难度递进的练习题组成，其形式有式题、图式应用题和文字应用题等。练习的目的，在于帮助学生通过新学得的概念或思维工具的操作，深化理解。任何概念，都必须通过亲自的操作（应用），才能达到真正的理解。
64. 以下引用课本中的六个例子，都是介绍新概念的课文，前两个是课文的局部，后四个是完整的课文。（互补律的例子不是引用于该课本，而是我在中国小学做研究时搜集的资料）。

加、减法算式的写法以及算式里的符号

65. 直观数量的概念和初步的加法和减法的概念，是所有小学生入学之前就已经具备了。把这些“原始概念”的数学表达方式——阿拉伯数字的写法、加法算式和减法算式介绍给学生，是引领他们走进数学学科殿堂的关键的第一步。以下是在学生学习了认、写数字 1、2、3 以后向他们介绍加法算式、减法算式课文的标题部分和概念介绍部分（本课的练习部分是数字 2 和 3 的书写）：

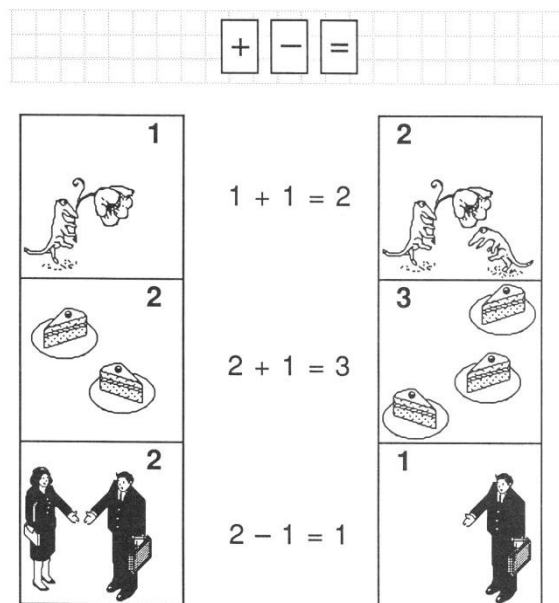


图 4: 加法算式、减法算式和符号名称的介绍(Moro etc., 1980, p.9)

66. 课文的标题是加号、减号和等号——把数字连成加减算式的必要符号。课文的“概念介绍”部分是三组图配三个算式。图的题材是学生熟悉的恐龙、蛋糕和生活场景。
- “ $1+1=2$ ”、“ $2+1=3$ ”、“ $2-1=1$ ”这样的加法算式和减法算式看起来很简单。然而它们是经历了数百年的演进之后约定俗成的、通用的表达方式。从此，学生就能用可以用全世界、和整个学科沟通的方式表达自己的数学知识了。
67. 在这一课里学习的只是数学表达的方式，在概念方面似乎并没有任何新的内容。然而，学生的智力还是得到了实质性的提升的——从他们平常生活里可能会说的“两块蛋糕加一块蛋糕是三块蛋糕”到“ $2+1=3$ ”，有两个“飞跃”：一是从具体数过渡到了抽象数；二是从他们“自己的话”过渡到了“全世界人都能懂的数学表达方式”。
68. 课文里还有一个学生或许暂时还意识不到的意味深远的安排：在第一次涉及加法和减法的概念和算式的时候，就把这两种运算安排在同一课里介绍。而学生原有的加法和减法的初步概念，则本是互不联系的。如此不动声色地把二者联系在了一起，其实是为将来进一步揭示加法和减法共同的数量关系所做的准备。

加法算式里数量的名称

69. 在学生熟悉了加法算式和减法算式之后，接下来需要向他们介绍算式里各数量的名称。以下是介绍加法算式里数量名称课文的概念介绍部分（本课没有另设标题）：

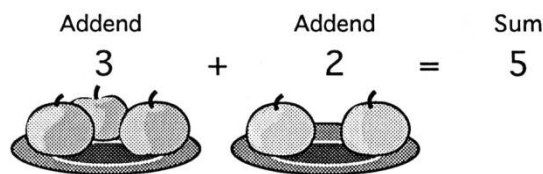


图 5: 向一年级小学生介绍加法里数量的名称 (Moro etc., 1980, p.38)

70. 图、算式、和文字三者结合，把加法算式里的两个数量名称介绍给了学生。“加数”与“和”这两个名称，使得学生在过去几周里熟悉了的具体加法算式（如 $3+2=5$ ， $2+2=4$ ， $2+1=3$ ……）上升到一个更为概括的水平——“加数 + 加数 = 和”。
71. 向学生介绍算式里数量名称的目的，有比较长远的和比较紧迫的两个方面。比较长远的目的，是为了引导学生一步步地认识四则运算后面的数量关系；而比较紧迫的目的，则是为了进一步向学生介绍学习一位数加、减法所需要的思维工具。

加法交换律

72. 我们前面提到的学生进行推算的第一个思维工具是“加法交换律”。请看课本在“和与被减数是 6-9 的加法和减法”阶段介绍加法交换律的课文 (Moro etc., 1980, p. 51):

Interchanging Addends.

$$2 + 1 = 3$$

$$1 + 2 = 3$$

1. $3 + 1$ $1 + 3$	$4 + 2$ $2 + 4$	$5 + 1$ $1 + 5$
2. $1 + 4 = 5$ $4 + \square = 5$	$3 + 4 = 7$ $4 + \square = 7$	$3 + 2 = 5$ $2 + \square = 5$

**A sum does not change
if the addends are interchanged.**

图 6: 向一年级小学生介绍加法交换律 (Moro etc., 1980, p.51)

73. 本课文标题是“交换的加数位置(Interchanging Addends)”。

74. 标题下面的概念介绍部分，是介绍加法交换律的图题：学生在街上看得到的场景——两辆救护车和一辆救火车，配“ $2+1=3$ ”和“ $1+2=3$ ”这两个算式。在这部分里学生不需要运算，他们的学习任务，是在教材和教师引导下观察和讨论新介绍的概念。
75. 练习部分包括两组与新介绍的概念相关的题目。第一组题引导学生注意：上面图示里加数 1 和 2 在算式里的位置交换以后和不变的情况，在不同加数（3 和 1，4 和 2，5 和 1）的算式里也会重现——这是一个规律。通过图画，学生可以很清楚地看到这个规律为什么存在。第二组是运算题，由学生根据刚才“看到”的规律，推算出填在空格里的数，同时，这也是让学生再次核实规律正确与否的机会。
76. 最后，通过以上思维活动之后，达到加法交换律的文字表述：“加数的位置交换，和不变”。在这套课本里，加法交换律是学生掌握的从已知推算未知的第一个“思维工具”。这个“工具”主要用于根据学生已经熟悉的大数加小数的和，推算出加数位置交换了的小数加大数的和。教材在接下来的第几页上，安排了多组小数加大数的题目，供学生进一步练习并体会交换律给运算带来的便利。
77. 我们前面说过，高数段需要的思维工具，往往是用低数段数字引进的，这就是一个具体的例子。在概念介绍部分，用的是第一数段的数字；而在练习部分，就可以用学得的概念解决第二数段的问题了。这样做其实有多重好处：1）保障了学生的注意力能在没有运算负担的情况下集中于概念方面的思考；2）有效地利用了学生已知的知识作为新知识的支撑；3）在利用学生已知知识的时候，让他们从中看到了“新”的东西，有温故知新、反过来深化原有知识的作用。4）学生新学得的思维工具马上被用于高数段加、减的运算，帮助解决新问题，可以很快看到其意义，并且得到练习使用的机会。
78. 还有一点有意思的地方也值得注意：虽然课文介绍的是“加法交换律”，但是从题目“交换加数的位置”，到最后“加数位置交换，和不变”的表述，“加法交换律”这个术语却始终没有出现。课文在做到对学术诚实的同时，也体现出对学生智力活动的体贴，不增加任何不必要的负担。“有效地利用学生已有的知识”与“对学术的诚实和对学生的体贴”相兼顾，这一点贯穿在课本每一次新概念引进的时候。

逆运算

79. “**减法是加法的逆运算**”是在学习“和与被减数是 6-9 的加法和减法”时引进并开始使用的另一种思维工具。下面是相关的课文，题目为“怎样求一个未知的加数”：

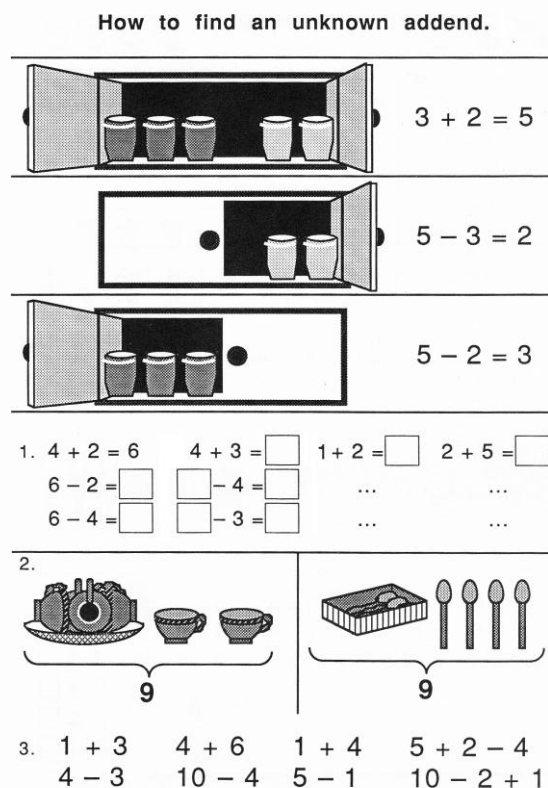


图 7: 向一年级小学生介绍减法是加法的逆运算 (Moro etc., 1980, p.55)

80. 课文的标题是“怎样求一个未知的加数(How to find an unknown addend)”。
81. 在概念介绍部分，图题用的也是第一段数的数。这一部分的三幅图画，有点像是卡通片的三个画面。最上面一幅，敞开着两扇门的碗橱里排列着 5 个杯子：左边 3 个，右边 2 个；图画旁边写着图所要代表的算式： $3 + 2 = 5$ 。中间一幅，左边的橱门关上了，遮住了它后面的 3 个杯子，5 个杯子只能看见右边的 2 个了；旁边的算式成了： $5 - 3 = 2$ 。最下面一幅展示的是，右边的橱门关上了，遮住了它后面的 2 个杯子，而左边的橱门则开着，它后面的 3 个杯子又可以看到了；旁边的算式是： $5 - 2 = 3$ 。
82. 第一幅图里 5 个杯子的数量和它们左 3 右 2 的排列并没有变，只是因为橱门开关的状态不一样，它们所代表的算式却从一个加法算式变成了两个减法算式。这三幅图的变化和与它们相配的算式，向学生揭示了减法与加法的逆运算关系——加法是已知两个加数求它们的和，而减法是已知和与一个加数求另一个加数。
83. 因为减法是加法的逆运算，是求一个未知的加数，所以，可以根据比较容易掌握的加法运算知识，来推算减法的得数。看到一个减法题而不知道得数时，只要想：“什么数加上减数等于被减数呢？”就有可能推算出减法的得数了。正如课文所示，如果我们知道 $3 + 2 = 5$ ，那么就能推算出 $5 - 3$ 一定等于 2，而 $5 - 2$ 一定等于 3。
84. 练习部分的三组题目，都是为了帮助学生通过自己的操作而加深对概念的理解，同时学习如何在运算过程中应用新学得的思维工具。第一组练习题里有四小组难度递进的

题目。第一小组，先呈现一个连答案在内的加法算式 $4+2=6$ ，要求学生根据加法算式推算出与之相应的两个减法算式的答案。第二小组，先呈现一个没有答案的加法算式，要求学生求出和；然后，要求学生把两个与之相关的减法算式补充完整，再写出它们的答案。第三小组，先呈现一个简单的加法运算 $1+2$ ，要求学生求出得数，再根据加法算式自行拟写两个相应的减法算式。第四小组，要求学生先运算一个比较困难的加法算式 $2+5$ （小数加大数，学生求和时可使用“交换律”），然后再根据加法算式自行拟写相应的减法算式。这四小组题目，一组比一组难，但是每一组都是由前一组引领、以前一组为基础的，通过这样层层递进的思维活动，学生一步一步地熟悉减法和加法的逆运算关系，并深化着对其的理解。

85. 第二组练习题，是两道“求一个未知加数”的图式应用题。这两幅图用不同的题材（杯子和茶匙）表现“两数之和”的情境。两道题都用数字交代和的数量，用图像交代一个加数的数量，而让另一个加数的数量处于“不明确”状态。而且，两道题的和是同样的——9，不同的只是已知的加数——左边一题可以看到2个杯子，右边一题可以看到4把茶匙。图式应用题和应用题一样，要求学生先列出算式，再求出答案。根据这课的教学内容，学生将列出减法算式，并求出那个题中没有明确交代的那个加数。事实上，“逆运算”的概念比“交换律”和“结合律”等运算规律多出了一层意义，即分析数量关系的意义。通过这组题目，学生在两个方面都得到了练习——既从“两数之和”的关系中通过确认已知数和未知数来确定运算方法，又练习了数字9不同的两元组合（7与2、5与4）及与之相关的加减运算。
86. 第三组练习题由四小组运算题组成^{ix}，前三组练习运用“逆运算”概念推算减法的得数，后一组是多步运算练习。多步运算练习是为了将来学习结合律而做的预先准备。
87. 紧跟着这篇课文，还安排了六组共36个题目(Moro etc., 1980, p.56) 让学生进一步练习从已知的加法运算推算减法运算的答案。
88. 同样，虽然课文介绍的是“减法是加法的逆运算”这一概念，但是“逆运算”一词也没有出现。课文的标题“怎样求一个未知的加数”用了学生已经熟悉的术语“加数”，和一个新概念——“未知”。相信这样的处理也是与对学生认知负担的合理考量有关。

互补律

89. “两数之和”或“两数之积”，小学数学里这两种最基本的数量关系都是由三个数组成的。任何三个数，一旦形成“两数之和”或“两数之积”的关系，就会出现这样的情况：如果一个数不变，另外两个数的改变必定是有规律地联系着的。举“3与2的和是5”为例，假定和5不变，那么如果第一个加数3增加，第二个加数2则必须得减少，而且增加和减少的必须是同一个量，否则“两数之和”的数量关系就破坏了。这就是“互补律”。“互补律”反映在加法和乘法里，也反映在它们的逆运算——减法和除法里。利用互补律，可以使许多运算变得简便^x。

90. 在 UCSMP 翻译的这本前苏联小学课本里我没有见到把加法互补律的实例。但是在中国小学数学教学的教室里，我曾经观察到一年级教师引导学生“找规律”——寻找加减算式中数量变化的规律。这其实就是在引导学生接触加减法互补律。上课的时候，老师带来三块小黑板，每块小黑板上有五道算式题。这五道题学生只能看见上面的三道——下面两道题是用纸遮着的。老师先出示一块小黑板，引导学生观察上面的三个算式里数量变化有什么规律。经过一阵热闹的观察和讨论，学生找到了规律：从上到下，这三道题依次是第一个加数减 1、第二个加数加 1，和不变。反过来，从下到上，这三道题依次是第一个加数加 1、第二个加数减 1，和还是不变。他们还发现，在第一题和第三题之间，增加或减少的数字是 2，和同样不变。这时，老师揭去盖着的纸，露出下面两道有空格的题目。学生立即就“猜”出这些空格里该填上什么数字了。接下来，老师又带领全班完成了另外两块小黑板上的题目，找到了另外两条规律：一个加数不变，另一个加数增加或减少一个数，和增加或减少同一个数；被减数不变，减数增加或减少一个数。

观察和发现规律 例 1	观察和发现规律 例 2	观察和发现规律 例 3
第一个加数每次加 1，第二个加数每次减一，和不变：	一个加数增加，和相应地增加：	减数增加，差反而相应减少：
$5 + 1 = 6$	$4 + 1 = 5$	$6 - 1 = 5$
$4 + 2 = 6$	$4 + 2 = 6$	$6 - 2 = 4$
$3 + 3 = 6$	$4 + 3 = 7$	$6 - 3 = 3$
$2 + \square = 6$	$4 + 4 = \square$	$6 - 4 = \square$
$1 + \square = 6$	$4 + 5 = \square$	$6 - 5 = \square$

图 8：引导学生通过观察“发现”或注意到互补律

91. 在上面任何一个例子里，学生通过观察表中的算式里哪一个量没有变？哪两个量变了？怎么变的？都很容易发现变化的规律。他们一旦发现了规律，就不仅能够填出表里面的空缺，而且还能把这个规律应用到其他数字的运算里去。

“加法结合律”与“和是 11-18 的进位加法”

92. 加法结合律以及它在减法里的应用，是学生联系记数法原则理解进位加法和退位减法的算理的重要概念，也是进行一位数进位加法和退位减法推算的重要思维工具。在课本(Moro etc., 1980)中，“加法结合律”以及它在减法里的应用是通过四篇课文介绍的：“和加一个数(Adding a Number to a Sum (p.106))”，“和减一个数 (Subtracting a Number from a Sum (p.113))”，“一个数加和 (Adding a Sum to a Number (p.125))”，以及“一个数减和(Subtracting a Sum from a Number (p.142))^{xi}。这样的安排，既照顾到了这些规律在实际运算中的不同情况，又遵照了对于学生来说由易到难的顺序。这四篇课文的内容结构很相似——概念介绍部分都是由三排每排三幅的卡

通和相关的算式组成（加法的题材是鸟，减法的题材是鱼）。课后的练习，都是一组要求学生“用三种办法解答”的两步运算题。由于“一个数加和”是解释并帮助学生理解进位加法的关键，我们以该课课文作为例子：

Adding a Sum to a Number.

$4 + (2 + 1)$

$4 + (2 + 1) = 4 + 3 = 7$

$4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1 = 6 + 1 = 7$

$4 + (2 + 1) = (4 + 1) + 2 = 5 + 2 = 7$

Solve in three different ways:

$5 + (1 + 3) \quad 4 + (3 + 2) \quad 6 + (2 + 1)$

图 9: 向一年级小学生介绍结合律 (Moro etc., 1980, p.125)

93. 代表课文标题“一个数加和”的算式是 $4+(2+1)$ ——4 加上 2 与 1 的和，我们又一次看到，高数段需要的思维工具，是通过学生已经掌握了低数段数字介绍的。低数段数字配上图，保证学生在没有运算负担的情况下，集中于概念的理解。
94. 三排卡通好像在诉说三个故事，这三个故事的开头和结果都是同样的，但是中间过程不同。由每排第一幅画表达的故事的开头是：树枝上停着 4 只小鸟，空中飞来 3 只小鸟，两只在前，一只在后，用算式 $4+(2+1)$ 表达这个情景。
95. 第一个故事的第二幅画，飞在后面的 1 只小鸟赶上来了，3 只小鸟排成一列往下飞，可以预见它们将同时落到树枝上，所以图下的算式是 $4+3$ 。

96. 第二个故事的第二幅画，空中的 3 只小鸟保持 2 只在前 1 只在后的状态，可以预想前面的 2 只将先落到树枝上，所以图下的算式是 $(4+2)+1$ 。
97. 第三个故事的第二幅画，空中的 3 只小鸟变成了 1 只在前 2 只在后的状态，可以预想前面的 1 只将先落到树枝上，所以图下的算式是 $(4+1)+2$ 。
98. 而三个故事的第三幅画又是同样的，7 只鸟都停在了树枝上。通过这三个故事揭示出，同样 $4+(2+1)$ 开头，有三种可能的运算过程而达到同样的结果：
- $4 + (2 + 1) = 4 + 3 = 7$
 - $4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1 = 6 + 1 = 7$
 - $4 + (2 + 1) = (4 + 1) + 2 = 5 + 2 = 7$
99. “概念介绍”下面的练习是一组“一个数加和”的题目，每个题都要求学生用 3 种不同的方法解答，所用的数字，是第二数段的，不涉及进位。
100. 当一个数加一个“两数之和”的时候，它可以直接与和相加，也可以先与构成和的任何一个加数相加，再与其另一个加数相加。“一个数加一个两数之和”的这些求解方式的学习，为学生学习“和是 11-18 的一位数加法”运算作好了准备。请看下面介绍“和是 11-18 的一位数加法”的课文：

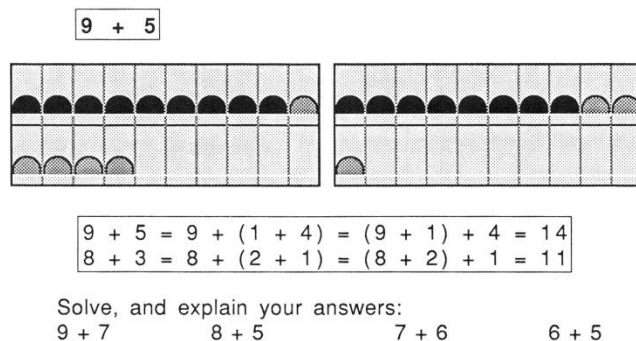


Figure 10: 介绍一位数进位加法课文 (Moro etc., 1980, p.138)

101. 请注意，介绍一位数进位加法即“和是 11-18 的一位数加法运算”的课文，却用了一道题目“ $9 + 5$ ”作为标题。
102. 标题“ $9 + 5$ ”的下方是一个方框，方框分割成两排，每排有 10 个格子。代表第一个加数的 9 个黑色半圆，排列在第一排，代表第二个加数的 5 个灰色半圆被拆成两个部分：1 个和 4 个。其中的 1 个放在第一排，与代表第一个加数的 9 个黑色半圆一起填满 10 个格子。另外 4 个灰色半圆放在第二排，如此构成和的数字：14。
103. 方框下面与之相应的算式是：
- $9 + 5 = 9 + (1 + 4) = (9 + 1) + 4 = 14$
104. 方框的图解和算式合在一起，交代了“和是 11-18 一位数加法”的算理：
105. 两个一位数相加，如果和大于 10，得先把一个加数“拆”成两个部分。其中的一个部分与另一个加数凑成一个 10，成为和的十位数上的 1；被拆加数的另一部分，便成为

和的个位上的数。我们使用的十进位位值制的记数法规定了必须这么做，结合律证明了可以这么做。

106. 该算理实施的技术上的关键，是要决定在两个加数中，保留哪个、拆开哪个？怎么拆？比较合理的做法是保留大的、“拆”小的，因为与大数凑成 10 的数，比与小数凑成 10 的数更容易被我们“看到”，这样做的话，下一步——把另一个加数拆成哪两个部分就比较容易决定。
107. 要让学生认识上述算理和实施的技术，“9 加一个数”的运算是最好的例子。因为与 9 是和 10 最近的数字，与 9 凑成 10 的数“1”最容易被学生看出来。而且，一个数被“拆出”1 之后所剩的部分也最容易算，所以运算难度也是最低的。让我们比较一下两个加法运算 $9+6$ 和 $7+5$ ，看出前者 9 需要 1 即可以凑成 10，从 6 减去 1 得 5，然后把 10 和 5 合成和 15，比看出后者 7 需要 3 可以凑成 10，从 5 减去 3 得 2，然后把 10 和 2 合成和 12 要明显地容易。尽管前者的数字比后者要来得大。由此看来，课文以“ $9+5$ ”作为标题是很妙的：9 加一个数是“和是 11-18 加法运算”的入门，而如果真正懂得了“ $9+5$ ”的算理，就掌握了这一阶段运算技能的模板 template，可以举一反三地运用到其他数字的运算中去。
108. 课文在分析了“ $9+5$ ”的算理之后，又安排了另一个题目“ $8+3$ ”，用同样的图解和算式说明算理。在难度上，8 加一个数的运算仅高于 9 加一个数的运算。“ $8+3=11$ ”，既是前面“ $9+5=14$ ”所揭示的算理的佐证，又是实施算理的技术运用与新案例的展示。而且，“ $9+5$ ”和“ $8+3$ ”运算过程相对照，是帮助学生发现和是 11-18 一位数加法运算中数字规律 pattern（9 加一个数，等于 10 加另一个加数减 1，8 加一个数，等于 10 加另一个加数减 2，以此类推）的好材料。
109. “概念介绍”后面的练习部分共四道题，除了求得答案以外，还要求“解释”算理。前两道题“ $9+7$ ”和“ $8+5$ ”，是例题介绍的算理和技术的直接演练，后两道题“ $7+6$ ”和“ $6+5$ ”，则要求学生把新学得的算理和技术应用于新的情况。事实上，所有和是 11-18 的一位数加法运算题，都是、或者都可以转化为 9 加一个数、8 加一个数、7 加一个数和 6 加一个数这四种情况中的一种^{xii}。所以，通过这四道练习题的操练，学生已经遇到并实践了所有种类情况的运算。在本课之后的几页课本上，还安排了更多的 11-18 的一位数加法运算题。
110. “和与被减数是 11-18 的一位数加、减法”是一位数加减法运算的最后一段。从技术上讲，也是难度最大的一段。表面上看，本阶段运算算理的解释只用两个“思维工具”：10 进位记数法和加法结合律。但是，用这两个思维工具顺利地进行“和与被加数是 11-19 的一位数加减法”的推算，却必须在一定的基础上完成。这个基础包括两个方面：
 - 能够熟练地掌握数字 2-10 的二元组合与加减运算；
 - 已经养成推算的习惯，并且懂得使用“交换律”、“逆运算”等其他思维工具进行推算

111. 好在之前三个阶段的学习，已经为学生建立起了这个基础。参照图 4 的九个台阶，在进入本教学阶段之前，学生已经站在了第七个之上，剩下的就是最后两步了。推算法是从学生刚入学时“带来”的小数段的心算能力出发的，到本阶段结束时，帮助学生完成了一位加、减、乘、除心算能力的发展，并且在数学思维工具的积累方面跨上了九个可以作为今后数学学习基础的台阶。

思维工具、计数器和“数字事实”

112. 通过以上的实例，我们对如何把“推算法”所用的思维工具介绍给一年级学生的整个过程有了一个大致、但又比较全面的了解。“推算法”与美国读者熟悉的“数数法”和“记背事实法”之间各有相似之处，也各有不同之处。
113. 从一方面看，“推算法”和“记背事实法”有些相似——它们都有较多的书面练习。但是，记背事实法强调的是记住学生自己无法参与决定的“事实”，而推算法则激励和帮助学生自己“想”出答案，通过学生的思维活动，增强对运算结果的印象，而最终发展起心算能力。事实上，当我们说“算”，常常是包含了“想”的。“推算法”就是在教一年级的小学生如何通过“想”来“算”。
114. 从另一方面看，“推算法”又和“数数法”有些相似——它们都注重学生原来的运算能力并强调学生依靠自己求得答案。但是，数数法是让学生继续依靠手指或其他计数器，对心算能力的发展放任自流。而“推算法”则是利用学生原始的数量概念逐步引进数学思维工具，并借助这些思维工具，有步骤地发展起学生一位数加、减、乘、除的心算能力。除了儿童已经掌握了诸如直观数字这样的最小的数字，对一位数进行加法和减法的运算是超出刚入学的小学生的能力的。推算法和数数法的根本区别，在于当学生遭遇本身运算能力的局限时，是依靠计数器求得答数，还是依靠思维工具扩展运算能力。推算法对儿童的“手指运算法”是不鼓励的。我认识的中国小学教师曾用“断奶”的比喻，说明学生必须放弃数手指，才能专心发展心算能力。为此，“推算法”必须有比“数数法”和“记背事实法”更为精心的教学设计和练习安排，以保证学生顺利跨越数手指的习惯和尚未企及的心算能力之间的距离。
115. 通过以上的课文实例，可以看到贯穿课本的一个可贵的特点：在最终的高要求和当下的低难度之间取得平衡。在长远的目标上，课本对于学生心算能力的要求是高的——前苏联的课本不仅要求学生掌握 20 以内加、减、乘、除的心算，还要求学生掌握 100 以内加、减、乘、除的心算。但是，从具体学习任务的设计上看，课本对于学生的认知活动又是非常的体贴。每一次引进一个新概念的时候，运算方面的认知负担都减到最低；数以千计的运算练习，题目与题目之间相联系，题组与题组之间相联系，引导学生通过许许多多可以承受的挑战，一步一步地发展起运算能力。

三个问题的提出

116. 在本文开始的时候，我指出了一位数加减法心算在小学数学学习中的重要性，并提出美国小学数学界应当反思这一内容教学的建议。在文中，我着重介绍了当今美国读者比较陌生的一种一位数加减法的教学——利用思维工具从已知的知识求未知的运算答案的“推算法”。最后，我想提请读者一起思考三个问题。

问题一：运算必定是机械的、不需要思考的吗？

117. 近几十年来，在美国小学数学界，“运算”教学是受到轻视的。在人们心目中，“运算”与“机械性学习”和“死记硬背”这样“低级的”思维活动联系在一起，而和“概念的理解”、“问题解决”等“高级的”思维活动无关。
118. 那么，之前本文介绍的可以帮助开始一年级课程的小学生依靠通过交换律、结合律、逆运算等思维工具发展起一位数加减法心算能力的“推算法”，是不是可以作为一个例子，说明其实“运算”可以不是“机械性”的、不是“死记硬背”的、而是在积极的思维过程中完成的？
119. 如果运算不一定是机械的，是可能在积极思维过程中完成的，那么我们当前把运算等同于“死记硬背”的误解又是怎么产生的呢？为什么美国很少看到和前面例子类似的含有精心设计的、在鼓励学生“动脑筋”的同时又为他们系统地介绍“思维工具”的运算教学？

问题二：如何对待“学生带到学校里来的知识”？

120. 一年级学生入学时，已经具备了一定的数学运算能力，他们是带着原有的“数学知识”来到学校的。以本文主题“一位数加、减法运算”为例，入学前儿童自己的运算方法一般包含两种技能：1）小数字（比如直观数量）用心算；2）心算能力所不能及的，借助计数器（手指）和数数求得答数。在儿童生活中，这两项技能根据运算的需要交替使用、是同样重要的。
121. 然而有意思的是，同样诉诸学生入学前已经具备的数学能力的“数数法”和“推算法”，在一位数加减法教学中所重视的，却各只是其中的一种。
122. “数数法”重视的是学生借助计数器进行一位数加减运算的技能。教学的任务，在于帮助学生从低级的策略过渡到高级的数数策略，最终达到用计数器和数数熟练有效地求得一位数加减法答案的结果。
123. “推算法”诉诸的，却是儿童对小数字的心算能力。儿童入学前已经达到的对直观数量和其他小数量的熟练掌握，代表着他们最基本的数量概念——数量大小 magnitude 的概念和数量关系的概念。“推算法”以儿童的这些最基本的数量概念为依托，一步一步地向儿童介绍相关的数学“思维工具”，引导儿童利用这些“思维工具”，从已知求未知，逐步扩展他们的心算能力，最终发展期熟练地进行一位数加减心算的能力。

124. 在如何对待学生“带到学校里来的数学知识”这个问题上，“数数法”和“推算法”遵循着根本不同的原则。“数数法”的原则，是要保留“儿童的数学”，鼓励并帮助学生依靠他们“自己的办法”解决运算问题。“推算法”的原则，是要尽早把儿童引上“正式数学”的轨道，学习用学科的方法解决问题。由于这原则上的不同，使得二者对儿童原有数学知识和技能的注意、选择，以及对之采取的措施都不一样。最后的结果也不同。
125. 遵循不同的原则的两种方法在处理学生的认知负担方面也有不同的特征。“数数法”的特征是“无难度、无积累”。由于效率不同的数数策略是从儿童自身行为中观察、总结出来的，所以引导他们一步一步地过渡，其实是在他们原定的轨迹 orbit/path 前移，是没有难度的。当一种高效率的新策略取代了低效率的旧策略，旧策略就没用了，所以是没有积累的。比如，从“全数”过渡到“从第一个数开始数”，儿童不会觉得难，而是更“容易”了、更有效了。而一旦开始了“从第一个开始数”的“新策略”，“全数”的“旧策略”就不再有意义了。这就是“无难度、无积累”。
126. “推算法”的特征是“低难度、有积累”。每一步都有一点难度，然而学生可以承受的，所以是“低难度”。当一个又一个的新的思维工具被引进后，之前引进的并不是被取代，而是将继续协同新引进的思维工具在运算中发挥作用，所以是“有积累”的。比如，在“和与被减数是 6-9 的加减法”的教学阶段，前后引进了“交换律”、“逆运算”和“互补律”数种用以从已知推算未知的“思维工具”，没有一种先引进的思维工具会因为后引进的而失去作用。非但在本阶段教学中不失去作用，而且还将继续在之后的阶段——“和与被减数是 10 的加减法”、“和与被减数是 11-18 的加减法”、乃至今后所有的小学数学学习中发生作用。这就是“低难度、有积累”。我们用图 13 来演示“无难度、无积累”和“低难度、有积累”的区别：

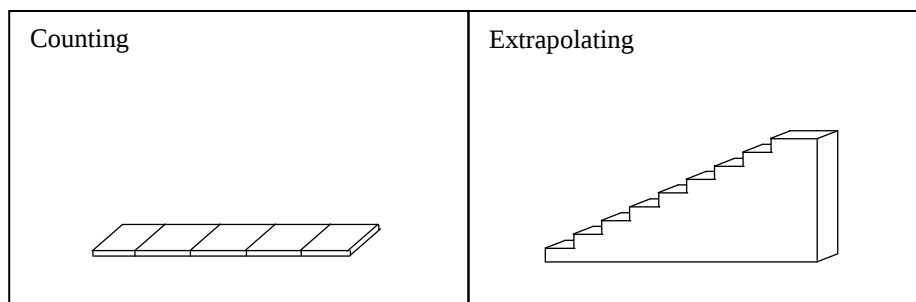


图 11：两种认知负担的比较：无难度、无积累和低难度、有积累

127. 通过图 11 我想展示的一个观点是，通过依靠数计数器的“数数法”，学生前进了，可以用有效的策略算出一位数加减的得数了，但是他们心算能力和抽象思维方面的提高是非常有限的。而通过依靠思维工具从已知求未知的“推算法”，学生不仅发展起一位数加减法的心算能力，而且还在抽象思维能力方面得到明显的提高。
128. 当儿童成为一年级小学生的时候，我们究竟要如何对待他们“带到学校里来的”数学知识？是让学生们的认知保持在所谓“儿童数学”状态、并让该状态得到充分发展，还

是有计划地引领他们的认知状态离开所谓“儿童数学”，向学科知识提升？如果让所谓“儿童数学”的状态充分发展，会发展成怎样？能自然地发展出学科知识吗？没有上过学的“巴西卖糖少年”的运算本领曾经震动了数学教育界。然而他们的运算本领，能和数学学科知识划等号吗？或者，能“自然地”过渡到数学学科知识吗？现今美国青少年可能自行发展到“巴西卖糖少年”那样的水平吗？即使能，那是我们所要的吗？

问题三：究竟有没有真正纯粹的所谓“儿童数学”？

129. 在当前美国小学数学界，学生“带到学校里来的”数学知识，或称为“儿童数学”，备受关注。“儿童数学”的存在，也是“数数法”的理论根据。但是，学生“带到学校里来的数学知识”究竟是什么？这样的知识状态能保持多久？真的有纯粹的所谓“儿童数学”吗？
130. “儿童数学”这个概念的来源，当可以追溯到皮亚杰对儿童数学能力发展阶段的研究。随着上世纪六十年代末皮亚杰开始在教育界受到的欢迎，“儿童数学”、“儿童算术”这样的词汇越来越频繁地出现在一些数学教育的学术论文或学术著作里。然而，无论是作者还是读者，似乎都忽视了一个重要事实：**除了短暂的婴儿阶段，纯粹的“儿童数学”其实是不存在的。**
131. 真实的情况是：**儿童认知的成长，无论是数学方面还是其他方面，都是在广义的教育，即成人为儿童心智发展而营造的认知环境里发生的。**成人为儿童心智发展而营造的认知环境有非正式教育和正式教育两种，儿童认知的发展，是他们先天的认知禀赋和这两种认知环境互动的结果。
132. 举数学为例，上学以前，儿童生活在非正式教育的认知环境里，他们的家长或抚养人在日常生活里随机、即兴地对他们进行口头的“数学教育”。在数学教育的学者 Fuson 在她的著作 *Children's Counting and Concepts of Number* (Fuson, 1988) 一书中，不仅用日记形式记下自己两个女儿数学认知发展的实例，也有对其他有关研究进行了归纳。书中所有的例子，都离不开孩子和成人的互动。无论是学者 Fuson 和她的丈夫，还是其他非学者的普通人母亲，都会“有策略地”为他们的学龄前儿童营造发展数字概念的认知环境^{xiii}。反过来，试想如果一个儿童不和任何人接触，或者一群儿童不和成人社会接触，到了入学年龄，他们能自己发展起我们今天能够观察到的所谓“儿童数学”或“儿童算术”吗？答案当然是否定的。**所以，儿童在入学时“带到学校来的”，其实并不是“他们自己的数学知识”，而是他们先天数学认知的禀赋和非正式教育环境互动的结果。**事实上，在成人养育下成长起来的儿童，他们纯粹的“儿童数学”是无法测到的。
133. 入学以后，儿童的心智发展又增加了一个新的环境——正式教育的认知环境。在人类文明数千年的历史上，正式教育一直是部分社会成员的特权，教育的普及，即使在美国这样的发达国家，也只是近一百几十年的事。一般来说，正式教育在专门的地方、由专门的教师、在固定的时间里进行，其教育的内容是以文本知识为主的。正式教育

一旦开始，儿童认知和这个新的认知环境的互动就开始了。所以，即使我们权且把儿童“带到学校里来的”、入学前在非正式教育环境里获得的数学知识称为“儿童数学”，从理论上讲，那也只是他们第一天成为一年级小学生时的情况。当他们在学校上了数学课，接受了正规的数学教育，他们的数学知识就是他们原有的知识和学校数学教育环境互动的结果了。学校提供的数学教育环境不同，学生的数学知识和数学认知的状态就不同了。例如，两个入学前数学知识相仿的学生，一个在“数数法”教学环境中学习一位数加减运算，另一个“推算法”教学环境中学习一位数加减运算，若干星期之后，他们的数学知识和认知状况就会有明显的不一样了。

134. 图 14 是从出生到 15 岁儿童认知的禀赋在和非正式教育和正式教育环境的互动中发展的概念图（用虚线分开的方格一格代表一年），图的下方，用了皮亚杰的“认知发展阶段(stages of cognitive development)”作为参照：

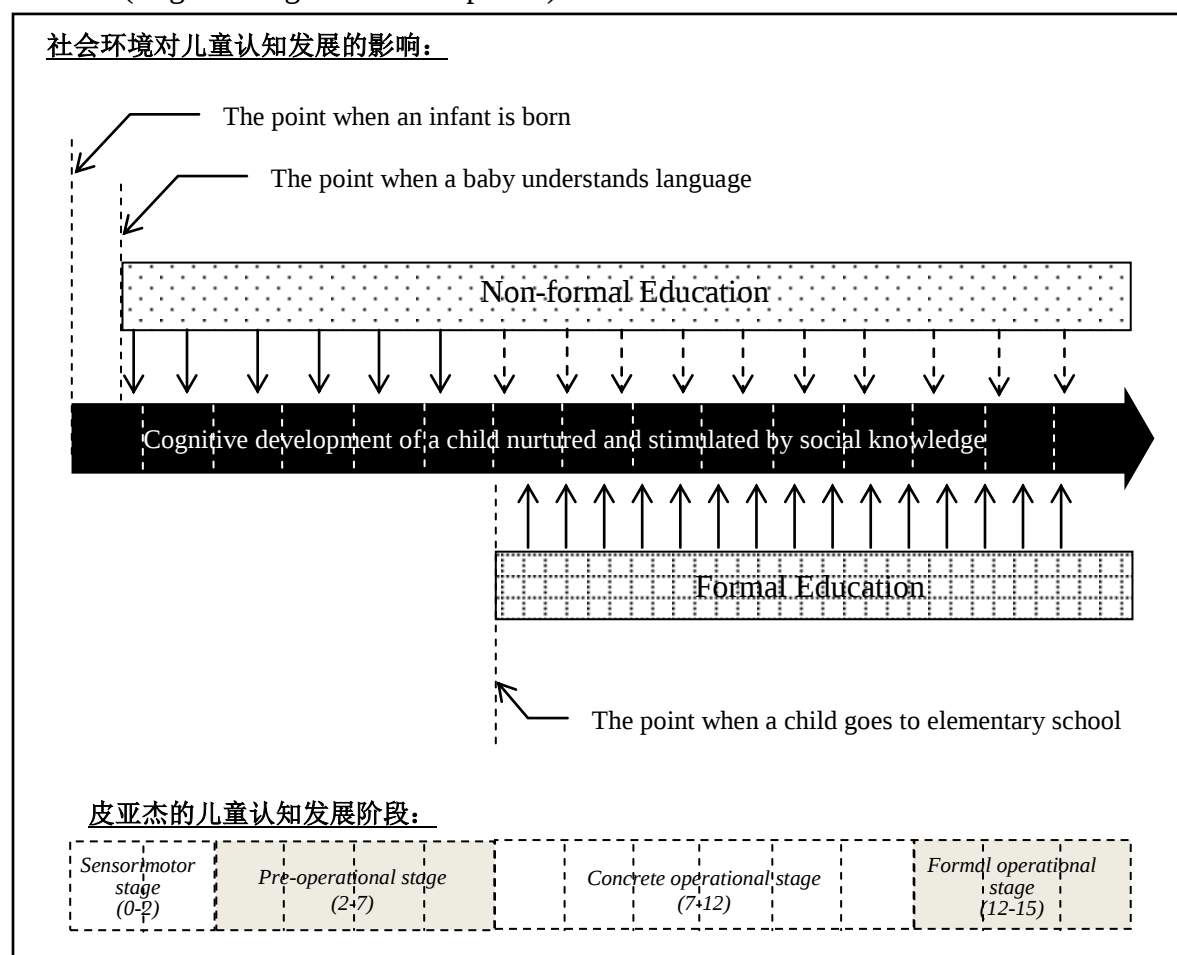


图 12: The model of cognitive development of a child nurtured and stimulated by social knowledge (Age 0 – 15, in a society with public school system)

135. 入学之前，儿童的认知环境主要是非正式教育，入学以后，正式教育成为主要的认知环境，非正式教育依然起作用，尤其在人文方面。

136. 皮亚杰是第一个系统地研究了儿童数学知识的发展并且建立了完整的理论的人。但是他所提出的儿童从出生到 15 岁的认知发展模式里，却没有考虑成人营造的教育环境可能产生的影响。作为“发生认识论”的创立者，皮亚杰的这个“疏忽”，其实是他研究研究事业的必然。
137. 我们知道，皮亚杰终生的事业是创建“发生认识论(genetic epistemology)”。 “发生认识论”，即史前人类知识发生和发展的理论。上世纪六十年代末，晚年皮亚杰在总结他一生所致力于创立的学说时说道：

发生认识论试图在历史和社会起源(sociogenesis)的基础上解释人类知识（尤其是科学知识）；并特别侧重于解释科学知识所依托的概念与操作的心理成因 (Piaget, 1968, p.1) ^{xiv}。

(Genetic epistemology attempts to explain knowledge, and in particular scientific knowledge, on the basis of its history, its sociogenesis, and especially the psychological origins of the notions and operations upon which it is based.)

138. 建立“发生认识论”的目的，是要解释史前人类科学知识的起因。然而，今天的人们，怎样才能了解史前人类知识的发生呢？皮亚杰有他独特的思路。请看：

发生认识论的基本假设是：人类群体发展按照逻辑推理而组织知识的过程，和儿童个体心理形成的过程是可以类比的 (Piaget, 1969, p. 4) ^{xv}。

(The fundamental hypothesis of genetic epistemology is that there is a parallelism between the progress (that our species) made in the logical and rational organization of knowledge and the corresponding formative psychological processes (of a child).)

139. 十九世纪后期，德国生物学家海克尔(Ernst Haeckel,1834-1919) 用图解说明，我们人类个体胚胎发育的过程，是整个人类种群生物进化过程的“重演” ^{xvi}，致使“重演论(Recapitulation Theory)”风靡西方思想界数十年。皮亚杰所说的“发生认识论”的基本假设——儿童个体心理/认识发展的过程重演整个人类认识/知识发展的过程，就是海克尔重演理论的延伸。于是，皮亚杰产生了一个雄心勃勃的设想：

基于这个假设，认识论中成果最为卓越的研究领域将是：重建人类的历史——史前人类的思想史(Piaget, 1969, p. 4) ^{xvii}。

(With this hypothesis, the most fruitful and the most obvious field of study (of epistemology) would be the reconstituting of human history – the history of human thinking in prehistoric man.)

140. 也就是说，既然儿童个体和认知相关的心理发展是人类群体知识发展的重演，那么，通过研究儿童，就可以重建史前人类知识发展的过程：

遗憾的是，关于史前人类的心理活动我们知之甚少。但是，我们身边有的是儿童。研究儿童，便是我们得以研究史前人类逻辑知识、数学知识和物理知识发展的最佳途径。(Piaget, 1969, p.4)^{xviii}

(Unfortunately, we are not very well informed in the psychology of primitive man, but there are children all around us. It is in studying children that we have the best chance of studying the development of logical knowledge, mathematical knowledge, and physical knowledge.)

141. 皮亚杰对胚胎重演论(recapitulation theory based on embryology) 作出延伸之后，找到了通过研究儿童来重建“史前人类逻辑知识、数学知识和物理知识发展”的途径——这就是发生认识论研究的基本思路。也是他研究儿童知识发展的理由所在。
142. 现在我们可以解释为什么皮亚杰关于儿童数学知识发展的研究中，儿童和成人营造的教育环境之间的互动这个这么重要的因素被忽略了：对于皮亚杰，儿童认知的发展不是他最终感兴趣的研究对象，而是他解决认识论问题的手段。他要通过研究儿童个体的认知发展，重建史前人类的认知过程。他对儿童发展的关注，受他研究目的所左右——人类史前知识发展的过程里，是没有和另一个“成年”的人类之间的互动的。在皮亚杰的思维框架里，儿童数学知识的发展，是随着时间的推移（年龄的增长）在他们自己活动中、在和同伴的交流即社会化过程中发展起来的。**这和他想要“重建”的史前人类认知发展的情况是相符的，可是和当今人类儿童认知发展的实际情况是不符的。**
143. 评判发生认识论的是非功过，不是本文的任务。这里要指出的是，由于某些原因，小学数学教育界曾经接受了皮亚杰的“儿童数学”的概念。而事实上，真正的“儿童数学”其实是不存在的。
144. 作为小学数学教育的参与者，教师、教材编写者等等，我们当然渴望了解学生是“怎样思考数学”的，但是我们也要清醒地认识到，没有纯粹的、一般的“学生如何思考数学”。“学生如何思考数学”，一定是特定的学生、在特定的时间点之前和特定的教育环境互动的结果。
145. 环境不同，互动的结果一定不同。儿童学习数学的环境，入学之前主要是由家长营造的；入学之后，主要发生在学校里，是由教学内容（教学大纲、课程、课本）和教师的教学共同参与所营造的。不同的家庭环境，对儿童入学前的数学知识差别有很大的影响。不同的学校教学环境，对儿童入学后的数学学习差别有很大的影响。
146. 最后，我要强调：**不能把“儿童数学”和学生已有的知识混为一谈。**真正纯粹的所谓“儿童数学”是不存在的，而学生已有的知识（包括数学概念、运算技能和思维方法），却是教学的重要依据。“儿童数学”，意味着它独立于成人影响之外，而“学生已有的知识”则是学生和他之前的教育环境互动的结果。作为教师，我们既要了解在自己介入之前学生已有的数学知识，也要明确教学一旦开始，我们自己就是参与决定“学生怎样思考数学”的人了。

结束语

147. 在文章的开头我们曾提到，一位数加减法教学，作为“20 以内数字的认识和加减法”的一部分，在奠定小学数学学习的第一块基石的过程中有不可小视的作用。我也指出一位数加减法教学可能存在着不同的教学途径。在文章里，我向美国读者介绍了“推算法”这一在中国等国使用的一位数加减的教学途径。有意思的是，如果没有比较和对照，美国和中国数学教育界或许都难以认识到自己的特点。美国小学数学界大概难以想象除了“数数法”和“记背事实法”，一位数加减法还有其他的教学途径。而对于中国小学教师来说，引领学生“动脑筋”是那么的理所当然，没有人像我，为了写这篇文章思索一位数加减法教学中“动脑经”的实质，并把这样的教学途径称之为“推算法”，或许也没有人会想到，交换律、结合律等进行“推算”的依据，其实是“思维工具”。
148. “一位数加减运算”只是小学数学教育开始时的一个知识点，但是我们在文章里所讨论的它的不同的教学途径，其实可以折射出整个小学数学教育背后的不同理念。2010 年 12 月公布的中国首次参加国际标准测验时上海学生的优异成绩，引起美国读者对中国数学教育的更大兴趣。可是美国读者或许不知道，中国国家教育部 2001 年出版的小学数学义务教育课程标准，明显地受到美国 NCTM 课程标准的影响。愿此文能够对两国数学教育界反思本国数学教育现状的人们有所帮助。

References

- Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York: Dover. (Original work published in two volumes in 1928 and 1929)
- Carpenter, T. C., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., & Empson, F. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Chapin, S., & Johnson, A. (2006). *Math matters* (2nd ed.). Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
- Moro, M. I., Bantova, M. A., & Beltyukova, G. V. (1992). *Russian grade 1 mathematics* (9th Ed., R. H. Silverman, Trans.). Chicago: University of Chicago School Mathematics Project. (Original work published 1980)
- Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology* (E. Duckworth, trans.). Columbia University Press. (Comprises the four Woodbridge Lecture delivered by Jean Piaget at Columbia University in October, 1968)
- Piaget, J. (1969). Genetic epistemology. *Columbia Forum*, 12(3), 4–11.
- Smith, D. (1925/1953). *History of mathematics*, Vol. II. Dover Publications: New York.

ⁱ 见 Dehaene (1997) *The Number Sense*, p.126—129.

ⁱⁱ “推算法”是我对照“数数法”和“记背事实法”之后给出的名称。这是**，对于中国或其他使用这种方法的地方的教师，很可能认为一位数加减法就是应该这么教的，并无任何特殊之处。

ⁱⁱⁱ 这七套教材是：北京、天津、上海、浙江小学数学教材联合编写组编《全日制六年制小学课本：数学》，1988。北京师范大学教育系、北京景山学校编《九年制义务教育五年制小学试用课本：数学》，1992。上海中小学课程改革委员会编《九年制义务教育课本：数学》，1993。北京教育科学研究院基础教育教学研究中心编《九年义务教育六年制小学实验课本：数学》，2001。张天孝编著《九年义务教育六年制小学教科书：现代小学数学》，2003。北京师范大学义务教育数学课程标准研制组编《义务教育课程标准实验教科书：数学》，2006。人民教育出版社课程研究所编《义务教育课程标准实验教科书：数学》，2008。

^{iv} 在历史上所有古代文明的记数法里，这三个数字都是用重复同一种符号的直观方式——三横、三竖、或三点来体现的（阿拉伯数字的 1、2、3，也是其来源古印度记数法 ancient Indian notation 用横杠代表一、二、三的草写形式）。见 Dehaenen(1997) p.65: Georges Ifran (1994), in his comprehensive book on the history of numerical notations, shows that in all civilizations, the first three numbers were initially denoted by repeatedly writing down the symbol for “one” as many times as necessary, exactly as Roman numerals. And most, if not all civilizations stopped using this system beyond the number 3... Even our own Arabic digits, although they seem arbitrary, derive from the same principle. Our digit 1 is a single bar, and our digits 2 and 3 actually derive from two or three horizontal bars that became tied together when they were deformed by being handwritten. Only the Arabic digits 4 and beyond can thus be considered as genuinely arbitrary. (（援引 Ifran 标页码）

Cuneiform Notation	┆	┆┆	┆┆┆	┆┆┆┆	┆┆┆┆┆
Etruscan Notation					^
Roman Notation	I	II	III	IV	V
Mayan Notation	.	..	...		—
Chinese Notation	一	二	三	四	五
Ancient Indian Notation	—	=	≡	+	Y
Handwritten Arabic	1	2	3	4	5
Modern "Arabic" Notation	1	2	3	4	5

Figure 3.1. Across the world, humans have always denoted the first three numbers by series of identical marks. Almost all civilizations abandon this analog notation beyond the numbers 3 or 4, which mark the limits of man's “immediate” apprehension of number. (Redrawn from Ifrah 1994.)

^v 2000-2005 期间，我曾经在加州五所小学的学前班 (Kindergarten) 里做过测试。这五所小学一所在 Palo Alto, 两所在 East Palo Alto, 一所在 Sacramento, 一所在 Mountain View。其中只有 Palo Alto 的一所是“普通”学校，其他四所的学生都有一半以上来自非英语为母语的、低收入、且家长很少受过高等教育的家庭，大量的孩子不会说英语，不会用英语数数。我随机把几块 1 立方厘米的小塑料块（颜色不论，同样颜色或不同样颜色均可）握在拳头里，邀请学生来和我玩一个游戏：当我打开拳头，他们必须很快说出我手掌上小塑料块的数目（不能数）。他们不一定要用英语，可以用自己熟悉的语言（比如西班牙语或汤加语 Tongan）。我告诉他们，如果谁跟我玩了五次并且全部说对，那就是他“赢”了，我给他们拍一张照片作为“奖赏”（实际上，即使他们说错了，我也会很快重新握紧拳头，不让他们知道自己错了，而继续进行“游戏”，测到五次，我就给他们拍照片）。有 100 多个孩子参加了这个“游戏”。结果是，当我手里的小塑料块是一块、两块或三块时，这 100 多个孩子没有说错过。但是当小塑料块是四块时，开始出现较多的错误，当小塑料块增加到五块、六块时，错误就更多了，而且可以感觉到孩子在“猜”。我还遇到这样的情况：一个孩子不会说数字，但是他用手指告诉我他看到的小塑料块。当看到两块时，他伸出两根手指，看到三块时则伸出三根手指。

^{vi} 具体数字，指和具体事物有联系的数字，比如 4 个苹果，5 颗糖，都是具体数字。而和具体事物没有联系的数字，比如 4、5，则称为“抽象数字”。Smith (1925) 曾经强调在具体数字和抽象数字之间作出区分对

- 于小学数学教育的重要性 (1925, p.11-12)。事实上, 很多家长和老师都会注意到, 对于低年级学生, 具体数字的运算往往要比抽象数字的运算更容易得多。
- vii “加法互补律”的内容是: “当一个加数增加一个数、另一个加数减少同一个数, 和不变”。它的变式是: “一个加数增加或减少一个数, 另一个加数不变, 和增加或减少同样的数。”。由于减法是加法的逆运算, 加法互补律也可以应用于减法。加法互补律的减法表述是: “被减数增加或减少一个数, 减数不变, 差增加或减少同一个数。”它的变式是: “被减数不变, 减数增加或减少一个数, 差减少或增加同一个数”; “被减数与减数增加或减少同一个数, 差不变”。与“加法互补律”相应的还有“乘法互补律”。
- viii 比如中国的小学课程曾经用第一学期二十周左右的时间, 解决“20 以内数的认识和加、减法”。在这近二十个星期里, 学生除了发展起 20 以内加、减运算的能力, 还初步建立了“两数之和”以及与之相应的加法和减法概念, 关于这方面的具体情况, 需另外撰文详述。
- ix 这套前苏联的教材里是在“和与被减数是 10 的运算”这个阶段引进“逆运算”概念的, 所以练习题里有 10 的运算。中国小学教材里则在之前的阶段介绍“逆运算”概念。
- x 事实上, “乘法互补律”的除法表述“商不变律”, 是推演和解释分数四则运算法则的关键。
- xi 加法结合律, 用文字表达是: 三个数相加, 先把任意两个数相加, 再加第三个数, 和不变 *A sum doesn't depend on grouping of its addends*。用字母表达是: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$ 。进位加法的算理是: 两个一位数相加, 如果和大于 10, 把两个加数中的一个进而分解成两个数的和, 其中的一个须能和原来的另一个加数凑成 10。先把能够凑成的两个加数 10 的加数相加得和 10, 然后再加上第三个加数。即: *If $a + b > 10$, then $a + b = a + (c + d) = (a + c) + d$; ($b = c + d$; $a + c = 10$)*
- xii 9 加一个数的运算不仅运算最容易, 而且也是最多的。和是 11-18 的进位运算是以 20 个不同的数的组合为基础的, 这 20 个组合里有 9 的组合有 8 个, 占 2/5 之多。所剩下的, 有 8 的组合有 6 个, 占总数的 3/10。再剩下的, 4 个组合里有 7, 最后剩下的是有 6 的 2 个组合。这四种组合的比是: 4:3:2:1 (2/5、3/10、1/5 和 1/10)。
- xiii Fuson 在有关研究的基础上归纳出母亲们为他们的学前儿童创造发展数字概念的认知环境的若干特征:
First, “Mothers seem to use number words more with very young children and then decrease their use as the children begin to use number words more frequently.”
Second, mothers “did not always just use the number word, but rather directed the child's attention to the appropriate attributes of a situation.”
Third, after such an initial structuring, the mother might then continue to restructure the same situation into other uses in a sequential goal-directed fashion... Mothers made judgments about what steps their child could carry out and then structured the steps into greater or lesser difficulty accordingly. (Fuson, 1988, p16)
- xiv Genetic epistemology attempts to explain knowledge, and in particular scientific knowledge, on the basis of its history, its sociogenesis, and especially the psychological origins of the notions and operations upon which it is based. (Piaget, 1968, p.1)
- xv The fundamental hypothesis of genetic epistemology is that there is a parallelism between the progress (*that our species*) made in the logical and rational organization of knowledge and the corresponding formative psychological processes (*of a child*). (Piaget, “Genetic Epistemology” in the Columbia Forum, 1969, p.4)
- xvi Haeckel 曾经画出了一系列人类胚胎发展阶段图, 表示出人类个体的胚胎如何一步步地经历了生物进化的各个阶段。后来的科学研究证明 Haeckel 画的胚胎发展阶段图与事实不符, 他提出的重演论被放弃。
- xvii “With this hypothesis, the most fruitful and the most obvious field of study (*of epistemology*) would be the reconstituting of human history – the history of human thinking in prehistoric man (Piaget, 1969, p.4).”
- xviii Unfortunately, we are not very well informed in the psychology of primitive man, but there are children all around us. It is in studying children that we have the best chance of studying the development of logical knowledge, mathematical knowledge, and physical knowledge. (Piaget, 1969, p.4)